Elementarna matematika 2

Zadaci s vježbi
Treći tjedan

Zadatak 1. Kutevi trokuta imaju omjer $6 : 3 : 1$. Dokažite da simetrala najvećeg kuta odsjeca od danog trokuta njemu sličan trokut.

Rješenje. Neka su α, β, γ kutevi trokuta, tako da je α najveći i γ najmanji. Iz $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ slijedi $\gamma = 18°$, $\beta = 54°$ i $\gamma = 108°$.

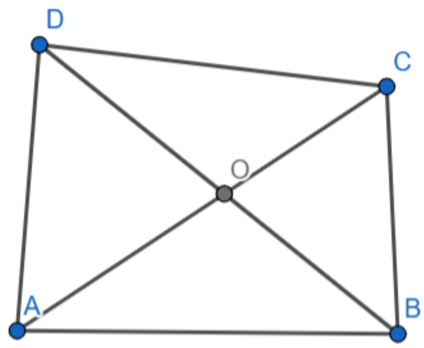
Simetrala kuta γ ga dijeli na dva kuta veličine β, a u jednom od dva trokuta dobivena povlačenjem simetrale će se nalaziti kut α. Po KK poučku sličnosti, taj trokut će biti sličan početnom. $\square$

Zadatak 2. Dijagonale četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki O. Dokažite da je $|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO|$ ako i samo ako je AD paralelno s BC.

Rješenje. Pretpostavimo prvo da vrijedi $|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO|$. To možemo zapisati drugačije kao

$$|AO| : |DO| = |CO| : |BO|.$$

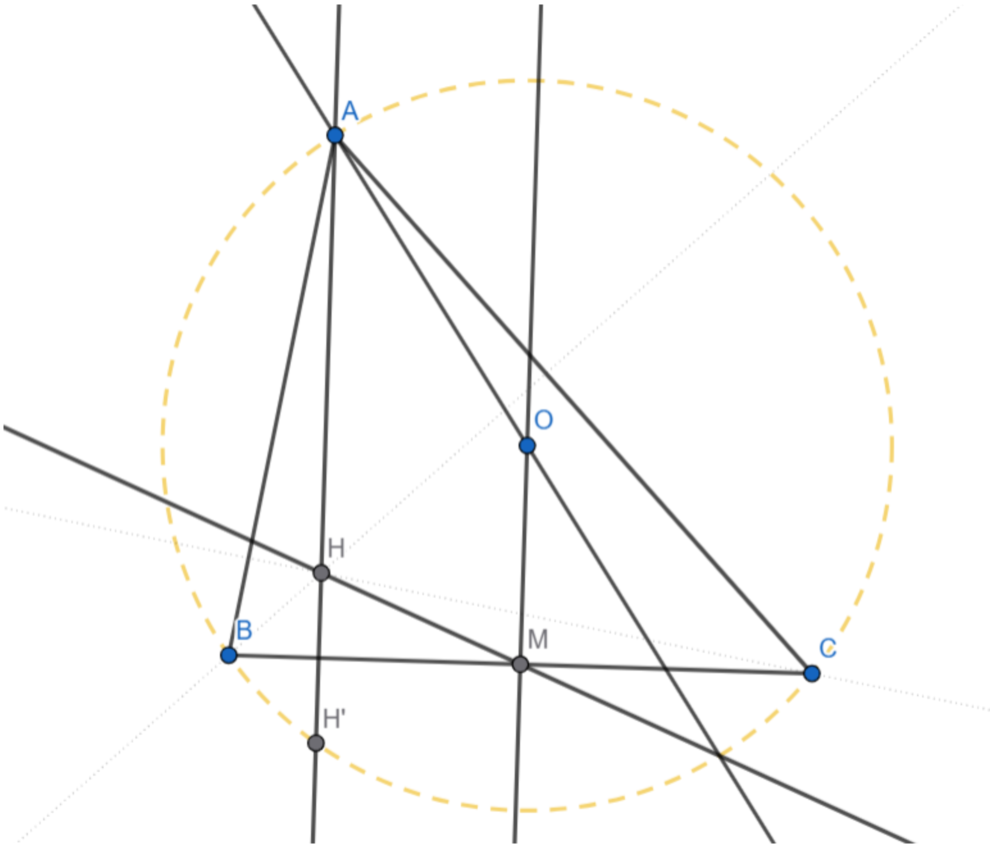
Kako je $\angle AOD = \angle COB$, prema KSK poučku slijedi da su trokuti AOD i COB slični, pa je $\angle ADO = \angle OBC$, odnosno to su kutovi s paralelnim kracima. Dakle, AD je paralelno s BC.



Obratno, pretpostavimo da su AD i BC paralelni. Tada je $\angle ADO = \angle OBC$, pa su po KK poučku trokuti AOD i COB slični, pa je $|AO| : |DO| = |CO| : |BO|$, odnosno $|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO|$. $\square$

Zadatak 3. Dan je trokut ABC. Dokažite da je udaljenost ortocentra od vrha A dva puta veća od udaljenosti središta opisane kružnice od stranice BC.

Rješenje. Označimo s O središte opisane kružnice i s H ortocentar od ABC. Neka je M polovište od BC. Tada je $|OM|$ udaljenost od O do BC i treba dokazati $|AH| : |OM| = 2 : 1$.



Neka je H' preslika ortocentra preko stranice BC. Prema zadatku od prošlog tjedna, H' leži na opisanoj kružnici od ABC.

Ako precizno skiciramo, možemo naslutiti da se pravac AO i pravac HM sijeku na opisanoj kružnici od ABC. Dokažimo tu tvrdnju.

Kod dokazivanja da se tri objekta sijeku u jednoj točki, često je strategija izabrati dva od ta tri, nekako označiti njihov presjek i dokazati da se taj presjek nalazi na trećem objektu. Ono što čini ovakve zadatke teškima je da ne znamo za koja dva od tri će nam situacija biti najjednostavnija.

U ovom slučaju, označit ćemo s X presjek polupravca HM i opisane kružnice od ABC te dokazati da je AX promjer opisane kružnice.

Ako točku H' preslikamo preko OM, dobit ćemo točku H'' na opisanoj kružnici, jer je H' na opisanoj kružnici. Ta točka H'' se nalazi i na pravcu HM, jer je dobivena od H kompozicijom osnih simetrija preko okomitih pravaca BC i OM, a kompozicija osnih simetrija preko okomitih pravaca je isto što i centralna simetrija preko presjeka tih pravaca, odnosno točke M. Dakle, $H'' = X$, te je $HH'X$ pravokutan trokut kojem je M polovište hipotenuze.

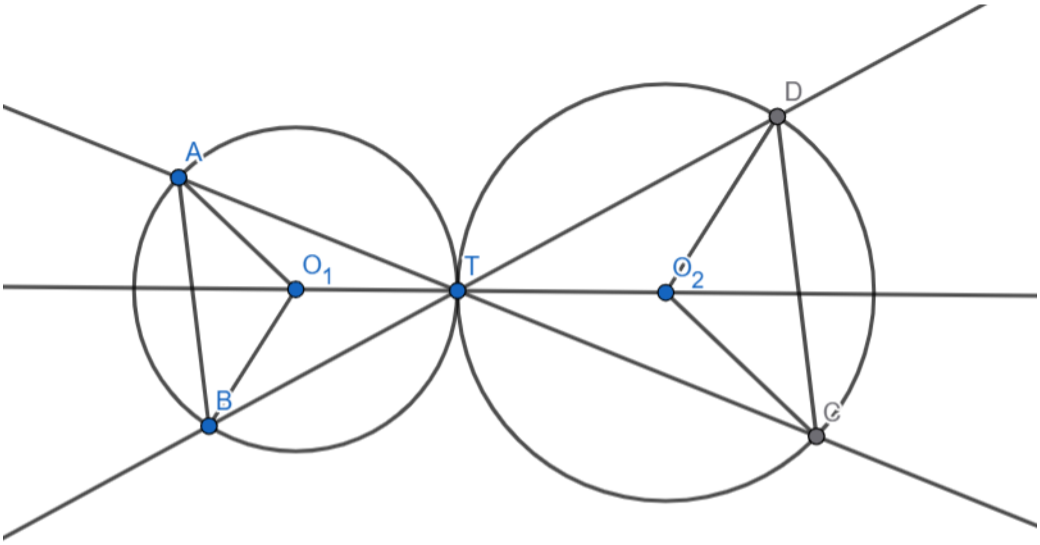
Sada vidimo da je $\angle AH'X = \angle HH'X = 90^\circ$, pa je po Talesovom poučku AX promjer opisane kružnice trokuta ABC. Posebno, O leži na AX.

Sada primijetimo da je OM srednjica u trokutu AHX, jer je O polovište od AX, te je OM paralelno s AH. Prema poučku o srednjicama, slijedi $|AH| = 2|OM|$.

□

Zadatak 4. Dvije kružnice dodiruju se izvana u točki T. Kroz točku T prolaze dvije sekante koje prvu kružnicu sijeku u točkama A i B, a drugu u točkama C i D. Dokažite da su pravci AB i CD paralelni.

Rješenje. Dokazat ćemo da su trokuti ABT i CDT slični. Označimo s O_1 i O_2 središta kružnica, te s r_1 i r_2 radijuse kružnica. Kako se kružnice dodiruju, njihova središta leže na pravcu.



Sada primijetimo da su AO_1T i CO_2T jednakokračni te imaju isti kut uz krak, $\angle AT0_1 = \angle CTO_2$. Slijedi da su slični, uz koeficijent sličnosti r_1/r_2, odnosno $|AT| : |CT| = r_1 : r_2$.

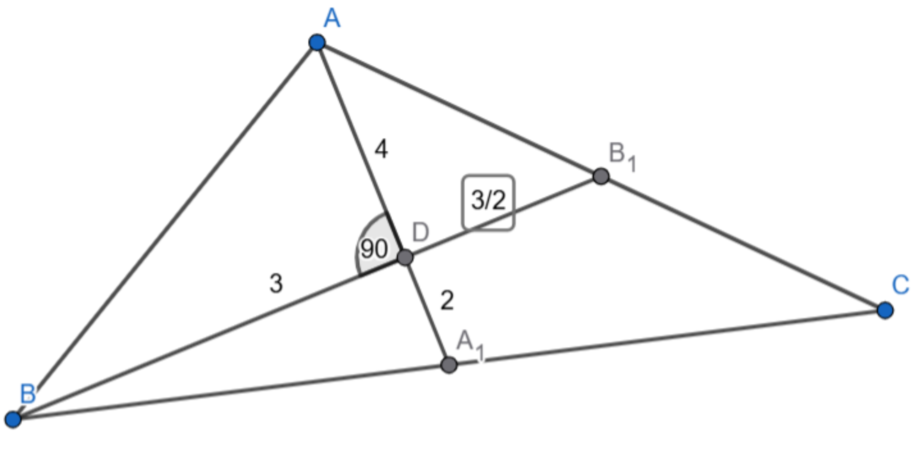
Analogno je $|BT| : |DT| = r_1 : r_2$. Kako je $\angle ATB = \angle CTD$, prema SKS poučku slijedi da su ABT i CDT slični.

Dakle, $\angle ABT = \angle TDC$, pa su to kutovi s paralelnim kracima, iz čega slijedi da su AB i CD paralelni.

$\square$

Zadatak 5. Težišnice AA_1 i BB_1 trokuta ABC imaju duljine $|AA_1| = 6$ i $|BB_1| = 9/2$ i međusobno su okomite. Izračunajte duljine stranica tog trokuta.

Rješenje. Neka je T težište od ABC. Kako težište dijeli težišnice u omjeru $2 : 1$, slijedi da su duljine dužina kao na skici:

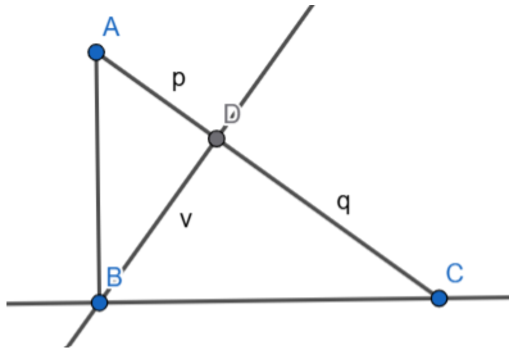


Sad vidimo da imamo tri pravokutna trokuta, kojima svima znamo duljine kateta, pa prema Pitagorinom poučku znamo i duljine hipotenuza.

Konkretno, $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|BA_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $|AB_1| = \sqrt{4^2 + (3/2)^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$. Onda je $|BC| = 2\sqrt{13}$, $|AC| = \sqrt{73}$. $\square$

Zadatak 6. U pravokutnom trokutu visina dijeli hipotenuzu na dužine duljina p i q. Dokažite da je duljina visine v geometrijska sredina dužina p i q, tj. $v = \sqrt{pq}$.

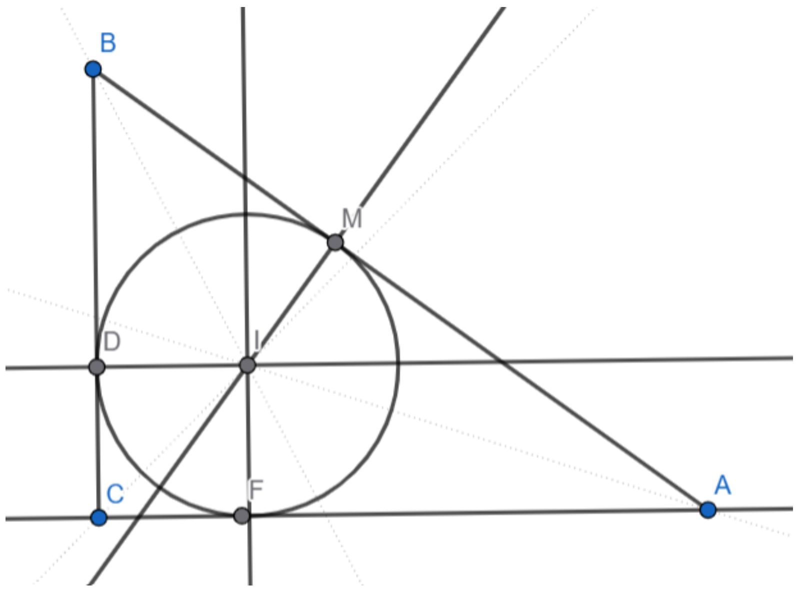
Rješenje. Označimo s D nožište visine iz vrha B na AC (kao na skici).



Tada su ABD i BDC slični početnom trokutu po KK poučku, pa je $v : p = q : v$, iz čega slijedi $v^2 = pq$. $\square$

Zadatak 7. Upisana kružnica dodiruje hipotenuzu pravokutnog trokuta ABC, s pravim kutem u vrhu C, u točki M. Dokažite da je površina trokuta ABC jednaka $|AM| \cdot |BM|$.

Rješenje. Označimo s r radijus upisane kružnice, te s D i F preostala sjecišta upisane kružnice sa stranicama (kao na skici).



Znamo da je površina trokuta jednaka $r \cdot \frac{a+b+c}{2}$, gdje su a, b, c duljine stranica. Sad ćemo izraziti $|AM|$, $|BM|$ i r preko a, b, c i dokazati da je $|AM| \cdot |BM|$ također jednako tom izrazu.

Označimo $x = |BM|$, $y = |AM|$. Tada su BDI i BMI sukladni (imaju zajedničku stranicu, $\angle DBI = \angle MBI$ te $\angle BDI = \angle BMI = 90°$).

Analogno su sukladni AMI i AFI. Nadalje, $DCFI$ je kvadrat čija je stranica duljine r.

Sada imamo $a = x + r$, $b = y + r$, $c = x + y$. Iz ovog sustava jednadžbi možemo izraziti x, y, r preko a, b, c. Konkretno, dobivamo $x = \frac{a+c-b}{2}$, $y = \frac{b+c-a}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$. Preostaje dokazati

$$r \cdot \frac{a+b+c}{2} = x \cdot y,$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{1}{4}(a+b-c)(a+b+c) = \frac{1}{4}(a+c-b)(b+c-a).$$

Ako razmnožimo obje strane, dobijemo da je to ekvivalentno s

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

odnosno

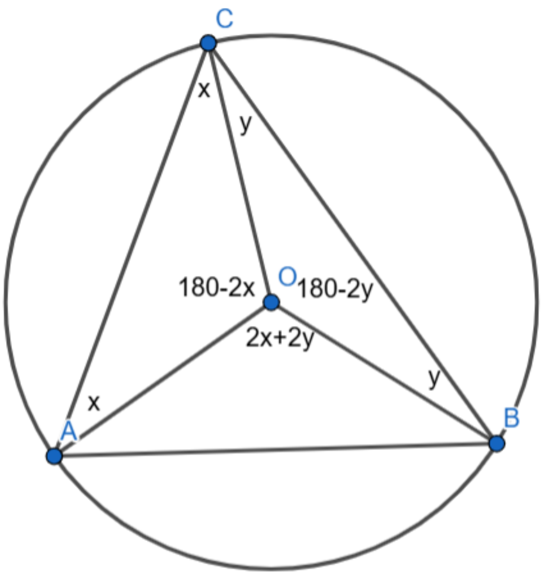
$$2(a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

što vrijedi po Pitagorinom poučku. $\square$

Zadatak 8 (Teorem o središnjem i obodnom kutu)**.** Dana je kružnica sa središtem O i njena tetiva $\overline{AB}$. Neka je C točka na kružnici koja je s iste strane pravca AB kao i O. Dokažite da je $2\measuredangle ACB = \measuredangle AOB$.

Rješenje. Dokazat ćemo tvrdnju samo u posebnom slučaju kad se O nalazi unutar trokuta ABC (ostali slučajevi su slični).

Neka je $x = \angle ACO$, $y = \angle BCO$. Tada zbog toga što su AOC i BOC jednakokračni, vrijede jednakosti kutova kao na skici:



$\square$